Міністерство освіти і науки України

Дніпровський національний університет

ім. Олеся Гончара \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Кафедра теоретичної та комп’ютерної механіки

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**

до виконання лабораторної роботи № 4 з

«Методів обчислень

для студентів групи ПА-19-3, МА-19-1,

Дніпро ДНУ 2021

Звичайні диференціальні рівняння

математичними моделями багатьох прикладних задач часто є задачі для звичайних диференціальних рівнянь. причому це можуть бути як звичайні диференціальні рівняння *p*-го порядку

,

так і системи *p* звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку:



або  (1)

де 

З теорії звичайних диференціальних рівнянь відомо, що розв’язок *u*(*x*) звичайних диференціальних рівнянь *p*-го порядку у загальному випадку залежить від *p* довільних сталих  тобто  Для визначення *C* (виділення єдиного або потрібного нам розв’язку) на розв’язок слід накласти *p* додаткових умов.

У звичайних диференціальних рівняннях залежно від вигляду додаткових умов розглядають такі три основні типи задач: задача Коші, крайова задача та задача на власні значення.

Якщо усі додаткові умови, тобто значення всіх невідомих функцій  задавати в одній точці  яку називають *початковою,* задача ж називається***задачею Коші*:**

 або  (2)

Самі ж додаткові умови називатимемо *початковими умовами*.

***Метод малого параметра*** застосовують коли права частина звичайного диференціального рівняння

, (3)

залежить від малого параметра ε або ж його вводять до правої частини штучно так, щоб за  допоміжне звичайне диференціальне рівняння істотно спрощувалось, а за  перетворювалося на вихідне.

Шукатимемо розв’язок (3) у вигляді ряду за степенями по ε:

 (4)

Підставляючи формально цей ряд у (3), матимемо

,

що є низкою задач Коші.

Щоб знайти невідомі функції  потрібно розв’язати низку звичайних диференціальних рівнянь, застосувавши *метод* *невизначених коефіцієнтів*, тобто прирівнявши вирази лівої та правої частин за однакових степенів ε.

При цьому заданою початковою умовою  скористаємося лише для знаходження  тобто тут  В усіх інших випадках слід додаткові умови брати  щоб не змінити початкові умови вихідної задачі.

Метод малого параметра (ММП) неважко поширити на системи звичайних диференціальних рівнянь, але відтак усі викладки стануть істотно громіздкішими.

Найуніверсальнішими методами розв’язання звичайних диференціальних рівнянь є **числові**. Перш за все це *метод (Єйлера) ламаних*— найпростіший числовий метод, розрахункова формула якого у випадку звичайного диференціального рівняння першого порядку така:

 (7)

Для числових розрахунків за методом ламаних досить знати початкове значення  (*самостартовність*), бо всі інші значення  знаходяться за формулою (7).

Якщо вихідна задача *погано обумовлена*, то числовий розв’язок може дуже різнитися від точного, оскільки відомо, що розв’язок звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами має експоненціальний характер.

Ефективнішими для розрахунків є *методи Рунге — Кутти (PK)*, які уможливлюють одержання розрахункових формул з різними порядками точності. Найпростішою з них є розрахункова формула другого порядку точності.

Цей метод має непогану точність, і його застосовують у числових розрахунках, беручи, наприклад, :

. (8)

Тут початкові умови такі: 

Розрахункові формули (7) та (8) легко поширюються на розв’язання систем звичайних диференціальних рівнянь.

Так розрахункова методу ламаних формула (7) набуває вигляду

 (9)

Тут і далі  — значення *k-ї* складової числового розв’язку в точці .

Розрахункові формули методу Рунге — Кутти 2-го порядку  для *системи двох звичайних диференціальних рівнянь* мають такий вигляд:

,

,

,

 (10)

**Лабораторна робота № 4**

**«Методи розв’язання задачі Коші для ЗДР»**

***Мета***: Ознайомитись із методами розв’язання задачі Коші для ЗДР.

***Постановка завдання.***

За заданими значеннями A, B, X, Е, знайти розв’язок задачі Коши вигляду у точках  знайти її розв’язок («вручну» за N=4)заМЛтаМРК 2**,**  аза допомогою навчальної Scilab-програми у - точках на сітці за N=8 ).

**Приклад.** Визначимо методами ламаних та Рунге – Кутти другого порядку числовий розв’язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння вигляду , яке має точний розв’язок 

Для одержання числового розв’язку скористаємося виразами (7) та (8). Запишемо розрахункові формули *методу ламаних* для розв’язання задачі Коші:



Визначимо числові розв’язки за методом ламаних у деяких вузлах сітки:

– *n*=0: 

– *n*=1: .

Установлені за методом ламаних значення числового розв’язку в усіх вузлах сітки зведемо в табл.

Далі знайдемо також числові розв’язки за методом Рунге – Кутти другого порядку в деяких вузлах сітки:

– *n*=0: 

.

– *n*=1: 



.

Знайдені за методом Рунге – Кутти другого порядку  числові розв’язки в усіх вузлах сітки наведемо в табл. [– числовий розв’язок, уточнений за правилом Рунге].

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблиця | | | | | | |
| *x* | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 |
| *u(x)* | 1,0 | 1,2155 | 1,4642 | 1,7496 | 2,0755 | 2,4462 |
|  | 1,0 | 1,2155 | 1,4642 | 1,7496 | 2,0755 | 2,4462 |
|  | 1,0 | 1,2150 | 1,4631 | 1,7477 | 2,0727 | 2,4423 |
|  | 1,0 | 1,2000 | 1,4300 | 1,6930 | 1,9923 | 2,3315 |

**//zkzdrk2 (alfa=1/2)**

**// Розв’язання ЗК для ЗДР МРК2 (alfa=1/2)**

**deff('FF = ff(x,yy)','FF = -yy/(1+2\*x)\*0.9');**

**deff('UU= uu(x)','UU = 1/(1+2\*x)^0.45');**

**function [u,y,x] = zkzdrk2(y0,N,a,b);**

**// Крок сітки**

**h=(b-a)/(N-1); xx=a; y1=y0;**

**for n=1:N x(n)=xx; y(n)=y1;**

**f1=ff(xx,y1); f2=ff(xx+h,y1+h\*f1);**

**y1=y1+h\*(f1+f2)/2; xx=xx+h;**

**end;**

**// Обчислення точного розв’язку**

**for n=1:N xn=x(n); u(n)=uu(xn); end;**

**// Перетворення векторів на матриці-рядки**

**x = x.'; y = y.'; u = u.';**

**endfunction;**

**// main program**

**// Коментар до фактичних параметрів zkzdrk2**

**//[u,y,x] = zkzdrk2(y0,N,a,b);**

**[u,y,x] = zkzdrk2( 1,6,0,1)**

**//Побудова графіків розв’язків**

**//plot(x,y,'k\*',x,u,'k-'); xgrid();**

**//xtitle(' Y=Y(X) U=U(X) ','X','Y U');**

**//legend(' Y=Y(X)',' U=U(X) ').**

Результати всіх розрахунків звести в в одну таблицю

*Текст звітів з лабораторних робіт виконувати українською мовою та набирати на комп’ютері за допомогою текстового редактора Word і роздруковувати на одному боці аркуша білого паперу формату А4(210×297 мм), дотримуючись таких розмірів полів: верхнє, ліве і нижнє – не менше 20 мм, праве – не менше 10 мм. Розмір шрифту повинен відповідати 14 (або 12) пунктам Times New Roman, міжрядковий інтервал при цьому має бути полуторний.*

***Тексти scilab-програм – шрифт Courier New***

*Зразок титульного аркуша (окремий аркуш***)**

ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. О.ГОНЧАРА

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧНОЇ ТА КОМП’ЮТЕРНОЇ МЕХАНІКИ

……

**Лабораторна робота №4 на тему**

**«Розв’язання задачі Коші для ЗДР»**

**з курсу «Методи обчислень»**

**Варіант №**

Виконав (ала)

Студент (ка) групи МА-19-1

Прізвище Ім’я

Дніпро, 2021

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Зміст звіту

Постановка задачі …………………………………………………………….....

1. Основні теоретичні відомості…………………………………………….…..
   1. Опис програмної реалізації……………………………………….….
   2. Аналіз результатів…………………………………………………….

Висновки………………………………………………………………………..

Перелік використаних джерел………………………………………….……..

Додаток. Код програми…………………………………………..……….……

**Термін виконання та складання до 1 липня.**

Методичні рекомендації до виконання лабораторної роботи

Укладач канд. фіз.-мат. наук, доц. кафедри ТКМ В.Г. Мусіяка